

Exercice 4

5 points

1. a. On calcule les coordonnées de \overrightarrow{AB} et de \overrightarrow{AC} .

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

On constate que $\frac{-5}{2} \neq \frac{-4}{5}$. Comme les coordonnées des vecteurs ne sont pas proportionnelles, \overrightarrow{AB} et \overrightarrow{AC} ne sont pas colinéaires et A, B et C ne sont pas alignés.

- b. D appartient au plan (ABC) si et seulement si les coordonnées de D vérifient l'équation cartésienne du plan (ABC).

$29 \times (-3) + 30 \times (-4) - 17 \times 6 = -309 \neq 35$. Les coordonnées de D ne vérifient pas l'équation cartésienne du plan (ABC), donc les points A, B, C, D ne sont pas coplanaires.

2. a. Les coordonnées du milieu de [AB] sont : $\frac{4 + (-1)}{2}$; $\frac{-1 + 1}{2}$; $\frac{3 + (-2)}{2}$ soit $\frac{3}{2}$; 0 ; $\frac{1}{2}$.

- b. Un vecteur normal au plan P_1 médiateur du segment [AB] est le vecteur $\overrightarrow{BA} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

donc une équation de P_1 est $5x - 2y + 5z = k$ avec k tel que les coordonnées du milieu de [AB] vérifient l'équation c'est-à-dire si

$$5 \times \frac{3}{2} - 2 \times 0 + 5 \times \frac{1}{2} = k = 10$$

Ainsi $5x - 2y + 5z = 10$ est une équation cartésienne de P_1 .

3. a.

$$\begin{aligned} MC^2 &= (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z-5)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 16 + 25 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} MD^2 &= (x-(-3))^2 + (y-(-4))^2 + (z-6)^2 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 9 + 16 + 36 \\ &= x^2 + y^2 + z^2 + 6x + 8y - 12z + 61 \end{aligned}$$

M appartient à P_2 est équivalent à $MC^2 = MD^2$.

$$\begin{aligned} MC^2 = MD^2 &\iff MC^2 - MD^2 = 0 \\ &\iff x^2 + y^2 + z^2 - 8y - 10z + 41 \\ &\quad - x^2 - y^2 - z^2 - 6x - 8y + 12z - 61 = 0 \\ &\iff -6x - 16y + 2z - 20 = 0 \\ &\iff -6x - 16y + 2z = 20 \\ &\iff -3x - 8y + z = 10 \end{aligned}$$

On obtient l'équation cartésienne de P_2 : $-3x - 8y + z = 10$.

b. Un vecteur normal à P_1 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Un vecteur normal à P_2 est le vecteur de coordonnées $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

On remarque que $\frac{5}{-2} \neq \frac{-3}{-2}$

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires car leur coordonnées ne sont pas proportionnelles.

Comme les vecteurs normaux à P_1 et P_2 ne sont pas colinéaires, alors les plans P_1 et P_2 sont sécants.

4. $\forall t \in \mathbb{R} \quad 5 \times (-2 - 1,9t) - 2 \times t + 5 \times (4 + 2,3t) = -10 - 9,5t - 2t + 20 + 11,5t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_1 .

$\forall t \in \mathbb{R} \quad -3 \times (-2 - 1,9t) - 8 \times t + (4 + 2,3t) = 6 + 5,7t - 8t + 4 + 2,3t = 10$

Tout point de Δ appartient à P_2 .

Δ est donc la droite d'intersection de P_1 et P_2 .

5. D'après la représentation paramétrique de Δ , un vecteur directeur de Δ est le vec-

teur $\vec{\delta}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 19 \\ -10 \\ 23 \end{pmatrix}$.

Le plan P_3 admet un vecteur normal \vec{n}_3 de coordonnées $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -4 \end{pmatrix}$.

La droite Δ et le plan P_3 ne sont pas sécants si et seulement si un vecteur directeur de Δ est orthogonal à un vecteur normal au plan P_3 .

On calcule le produit scalaire des deux vecteurs précités :

$$\vec{\delta} \cdot \vec{n}_3 = 19 \times 8 + (-10) \times (-10) + 23 \times (-4) = 160 \neq 0$$

Le produit scalaire n'est pas nul, les deux vecteurs ne sont pas orthogonaux, Δ et P_3 sont donc sécants.

6. On considère le point H équidistant des points A, B, C, D. Comme $AH = BH$, H appartient à P_1 . Comme $DH = CH$, H appartient à P_2 . Ainsi H appartient à l'intersection des deux plans, la droite Δ . Comme $AH = CH$, H appartient au plan P_3 . Ainsi H est l'intersection de Δ et de P_3 .

Le point équidistant des sommets d'un tétraèdre est l'intersection des plans médiateurs de ses arêtes.

On peut déterminer les coordonnées de H.

Il suffit de résoudre l'équation :

$$8(-2 - 1,9t) - 10t - 4(4 + 2,3t) = -15$$